Próbna matura Poziom Rozszerzony Grudzień 2025/2026

Paulina od Matematyki

Zadanie 1. (0-2)

Proces ładowania pewnego urządzenia przebiega zgodnie z zależnością

$$Q(t) = \begin{cases} 100 \cdot (1 - k^t) & dla \quad t \in [0,3) \\ 87{,}5 + 4 \cdot \log_2(t-2) & dla \quad t \in [3, \infty) \end{cases}$$

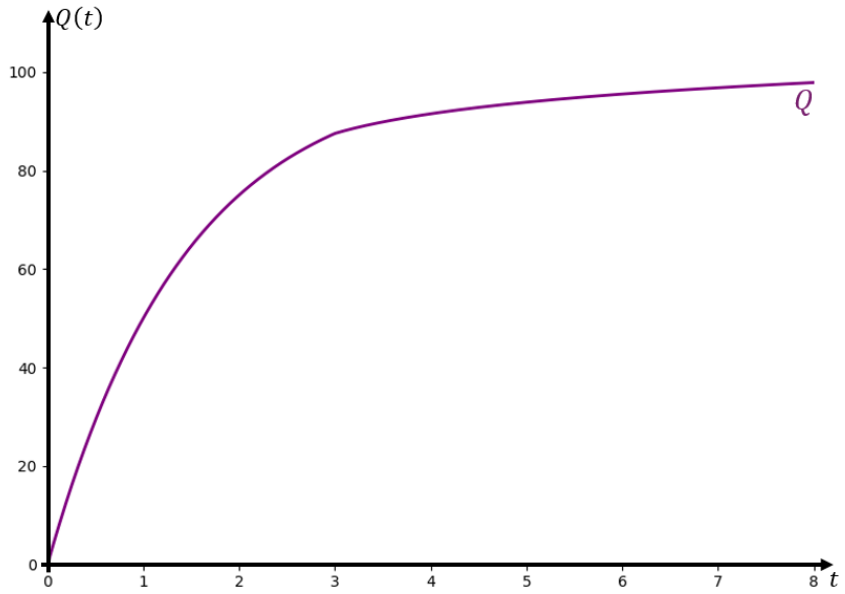
gdzie

$Q(t)$ – poziom naładowania urządzenia (wyrażony w procentach)

t – czas, który upłynął od momentu rozpoczęcia ładowania (wyrażony w godzinach)

k – współczynnik liczbowy

Rozpoczęto proces ładowania tego urządzenia, który przebiegał zgodnie z zależnością Q. Wykres tej zależności przedstawiono na poniższym wykresie:



Funkcja $Q(t)$ jest ciągła.

Oblicz poziom naładowania urządzenia po 2,5 godziny od rozpoczęcia procesu ładowania. Wynik zapisz w procentach, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 2. (0-2)

Prosta o równaniu $y = 18x - 27$ jest styczna do wykresu funkcji f, określonej wzorem

$$f(x) = 3x^3 + mx^2 + kx + 1$$

w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 2.

Oblicz k oraz m. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-3)

Niech $a = \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5}$.

Wykaż, że

$$\boldsymbol{log_2 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot \ldots \cdot log_{98} 99 \cdot log_{99} 100 = \frac{4a+6}{3}}$$

Zadanie 4. (0-3)

Rozwiąż nierówność

$$|x^2 - 4| < 5 - 8x$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-3)

Dany jest trójkąt prostokątny o kącie prostym przy wierzchołku A. Ponadto, spełnione są warunki:

- na przyprostokątnej AB trójkąta leży punkt K w taki sposób, że $|AK| = 2 \cdot |KB|$
- na przyprostokątnej AC trójkąta leży punkt M w taki sposób, że $|AM| = 2 \cdot |MC|$
- na przeciwprostokątnej BC trójkąta leży punkt L w taki sposób, że $|BL| = |LC|$

Kąt ALC ma miarę równą β.

Wykaż, że stosunek pola koła opisanego na trójkącie ABC do pola czworokąta $AKLM$ jest równy $\frac{3\pi}{2\sin\beta}$.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 6. (0-3)

Prawdopodobieństwo wygranej w pewnej grze losowej jest zawsze równe $\frac{1}{4}$. Michał postanowił, że przez cały tydzień (od poniedziałku do niedzieli) będzie grał w tą grę – każdego dnia dokładnie raz.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że Michał wygrał w tej grze dokładnie dwukrotnie w pierwszych czterech dniach tygodnia, jeśli wiadomo, że łącznie w ciągu tygodnia wygrał 4 razy. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 7. (0-4)

Liczby $2x - 18$, y oraz $x^2 - 6x + 3$ są odpowiednio – pierwszym, trzecim oraz piątym wyrazem nieskończonego, rosnącego ciągu geometrycznego (a_n). Liczby x oraz y są całkowite. Trzywyrazowy ciąg $(3x, y, 2 - 5x)$ jest arytmetyczny.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o numerach parzystych. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 8. (0-4)

Rozwiąż równanie

$$\boldsymbol{sin^3 x + sin^3(2x) = 2cos\,(3x) + 6cos\,x + 1}$$

w przedziale $[0, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 9. (0-4)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD takich, że $|AB| > |CD|$. Koło o polu 12π i środku w punkcie S jest wpisane w ten trapez. Kąt ASB ma miarę $120°$.

Oblicz pole trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 10. (0-5)

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ o podstawach $ABCD$ oraz $EFGH$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$ graniastosłupa. Punkt K leży na krawędzi CG graniastosłupa w taki sposób, że stosunek tangensa kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy do tangensa kąta nachylenia odcinka SK do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{2}{3}$. Krawędź podstawy graniastosłupa ma długość równą a, a wysokość graniastosłupa – ma długość równą H. Płaszczyzna π przechodzi przez punkty B , D oraz K.

Oblicz odległość wierzchołka C graniastosłupa od płaszczyzny π. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 11. (0-6)

Funkcje kwadratowe f oraz g zmiennej rzeczywistej x określone są wzorami

$$f(x) = x^2 - (3m - 5)x + 4 - 3m$$

oraz

$$g(x) = x^2 + (m - 1)x + 14 - 2m$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których obie funkcje: f oraz g mają po dwa różne miejsca zerowe, a suma kwadratów miejsc zerowych funkcji f nie jest większa niż liczba o 24 mniejsza od sumy sześcianów miejsc zerowych funkcji g. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 12. (0-6)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, na którym można opisać okrąg. Wiadomo, że $A = (-3,2)$, $B = (1, -2)$ oraz $C = (-2,7)$. Punkt D leży na okręgu o równaniu $x^2 + (y - 1)^2 = 85$, a jego współrzędne są różnymi, dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Prosta l przechodzi przez punkty A oraz D.

Oblicz cosinus kąta nachylenia prostej l do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y). Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne, dla których promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość równą R.

Zadanie 13.1. (0-2)

Wykaż, że objętość V bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej krótszą przyprostokątną tego trójkąta w zależności od długości a tej przyprostokątnej jest określona wzorem

$$V(a) = \frac{\pi}{3}a\left(4R^2 - a^2\right)$$

Zadanie 13.2. (0-3)

Objętość V bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej krótszą przyprostokątną tego trójkąta w zależności od długości a tej przyprostokątnej jest określona wzorem

$$V(a) = \frac{\pi}{3}a(4R^2 - a^2)$$

dla $a \in \left(0, \sqrt{2}R\right)$.

Wyznacz długości boków tego z rozważanych trójkątów prostokątnych, dla którego objętość powstałej bryły obrotowej jest możliwie największa. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com